

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И НАНОТЕХНОЛОГИИ

Л. Н. Смирных

Новосибирский государственный университет

Физический факультет

Ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск-90, Россия

E-mail: smirnykh@ngs.ru

В работе приведены экспериментальные данные по измерению параметров движения броуновских частиц микрометрового диапазона в воде. Данные показывают, что принятые в настоящее время законы броуновского движения частиц являются лишь статистическим пределом при очень большом числе N зафиксированных последовательных положений частицы ($N > 1000$), тогда как при относительно малом числе ($N \sim 200$) экспериментальные значения коэффициента диффузии D могут в несколько (2–5) раз расходиться с расчетным значением. При любых N в законе движения появляется постоянное слагаемое c : $\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt \pm c$, не находящее объяснения в рамках винеровского случайного процесса, принятого в качестве математической модели броуновского движения. Исследованные особенности движения индивидуальных броуновских частиц заставляют полагать, что при относительно малом числе $N \sim 100$ параметры движения отражают скорее флуктуационную микродинамику поведения самой жидкости, чем такие обобщенные макропараметры системы среда+частица, как коэффициент диффузии D . Этот факт может оказаться важным для тех процессов нанотехнологий, которые связаны с поведением частиц в жидкостях при малых временных и пространственных масштабах (от нано- до микрометрового диапазона). В этом смысле регистрация параметров движения индивидуальных броуновских частиц может послужить довольно тонким инструментом для изучения флуктуационной микродинамики поведения жидких сред.

1. Что такое броуновское движение?

Предварительное замечание. В тексте приняты сокращения: ФЭ — Физическая энциклопедия [1], БРЭ — Большая Российская энциклопедия [2].

Обратиться к подробной экспериментальной проверке законов броуновского движения автора заставили два фактора. Во-первых, современные средства наблюдения, регистрации и последующего анализа броуновского движения в жидкости предоставляют нам фантастические возможности по сравнению с теми, которые были в руках ученых того времени, когда создавалась теория броуновского движения (А. Эйнштейн, М. Смолуховский, Ж.Б. Перрен, Т. Сведберг — 1900–1910 гг.). Эти средства позволяют экспериментально исследовать броуновское движение не только в научных или вузовских лабораториях, но и в школьных кабинетах физики. Во-вторых, развитие современных

нанотехнологий требует от нас гораздо более подробного и корректного знания реального поведения сред и частиц при малых временных и пространственных масштабах, т. е. в области пространства от микро- до нанометрового диапазона. В этом смысле исследование броуновского движения представляет интерес не только с точки зрения изучения самого этого явления, но и в качестве инструмента, позволяющего получить данные о структуре жидкости и ее поведении в указанных масштабах времени и пространства.

В результате многочисленных измерений автор пришел к выводу, что, возможно, нам придется пересмотреть ответ на вопрос, что такое броуновское движение в жидких средах. И убедительным стимулом для этого могут служить только непосредственные экспериментальные факты, а не априорные соображения. В настоящей статье обсуждаются результаты экспериментов, специально поставленных с целью выяснения характерных особенностей параметров движения индивидуальных броуновских частиц при малом ($N \approx 100-200$) и большом ($N \approx 1000-2000$) числе последовательно фиксируемых положений частицы в жидкости. При этом отмечается, что терминология по броуновскому движению, принятая в современной справочно-энциклопедической и учебной литературе, допускает неоднозначные трактовки, что иногда приводит к ошибочным заключениям.

1.1. Современные представления о броуновском движении в жидкости

1. Как физическое явление броуновское движение определяют:

Цитата 1: *“Беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием ударов молекул окружающей среды”* (ФЭ [1], статья “Броуновское движение”).

Цитата 2: *“Беспорядочное движение малых (размерами в несколько мкм и менее) частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием толчков со стороны молекул окружающей среды”. “Причины Б. д. — тепловое движение молекул среды и отсутствие точной компенсации ударов, испытываемых частицей со стороны окружающих ее молекул, т. е. Б. д. обусловлено флуктуациями давления”* (БРЭ [2], статья “Броуновское движение”).

Других ссылок не даем, поскольку все современные определения броуновского движения практически идентичны приведенным. Таким образом, главными (атрибутивными, неотъемлемыми) свойствами данного явления, выделяющими его среди других физических явлений, считаются следующие:

- 1) движение броуновских частиц “беспорядочно” и
- 2) его причиной являются “удары молекул окружающей среды”.

Что касается первого свойства, то при переходе к научной теории неопределенное свойство “беспорядочности” моделируют математически однозначным понятием “винеровский случайный процесс”.

Цитата 3: *“Математической моделью Б. д. является винеровский случайный процесс”* (ФЭ [1], статья “Броуновское движение”).

Что касается второго определяющего свойства — причины броуновского движения, то оно таким и осталось со времен Эйнштейна–Смолуховского: “Дви-

жение броуновской частицы с трением под действием ударов молекул окружающей среды”. Хотя, с точки зрения современной физики, воду, например, никак нельзя считать средой с беспорядочно движущимися молекулами. Жидкость тем и отличается от газа, что при температуре жидкого состояния межмолекулярные силы взаимодействия больше тепловых, что и обеспечивает их “удержание” вместо разлета, как это свойственно газу (в том числе — газу молекул H_2O)*. Поэтому в отличие от газа молекулы жидкости практически всегда находятся во взаимодействии друг с другом. Отсюда следует, что передача импульса от них к броуновской частице — это явление ‘коллективное’, а не ‘помолекулярное’. Именно поэтому вязкость жидкости (а следовательно, и вязкостное трение в ней) *уменьшается* с ростом температуры, а не растёт, как это свойственно газу. К такому же заключению о *коллективном* характере взаимодействия жидкости с броуновской частицей приводит и то обстоятельство, что частица является хотя и малым, но все-таки *макротелом* по отношению к размерам молекул и межмолекулярным расстояниям в жидкости. И поэтому на границе раздела жидкость–частица обязательно проявляются такие коллективные явления, как поверхностное натяжение, смачиваемость и т. д.

Оба замечания свидетельствуют о том, что в жидкости причиной броуновского движения лишь в нулевом приближении можно считать “беспорядочные толчки молекул”, поскольку коллективные явления (кластеризация молекул воды и приповерхностные явления на границе вода–частица) фактически исключают однозначно главенствующую роль помолекулярного взаимодействия жидкости и частицы (см., например, [3, 4]). Более подробные исследования характера движения броуновских частиц при относительно небольшом числе N могли бы прояснить этот вопрос, важный для развития нанотехнологий, тогда как при очень большом N все характерные особенности флуктуационной микродинамики жидкости будут сглажены статистическим усреднением.

2. Теоретическая модель броуновского движения добавляет еще два атрибутивных свойства броуновского движения. В БРЭ [2] по поводу законов броуновского движения сказано следующее.

Цитата 4: “Общая картина Б. д. описывается законом Эйнштейна для среднего квадрата смещения частицы $\langle \Delta x^2 \rangle$ вдоль любого направления x . Если за время между двумя измерениями происходит достаточно большое число столкновений частицы с молекулами, то $\langle \Delta x^2 \rangle$ пропорционально этому времени τ :

$$\langle \Delta x^2 \rangle = 2D\tau. \quad (1)$$

Здесь D — коэффициент диффузии, **который определяется сопротивлением, оказываемым вязкой средой движущейся в ней частице**. Для сферических частиц радиуса a он равен

$$D = kT/6\pi\eta a, \quad (2)$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, η — динамическая вязкость среды.

* Точнее: силы межмолекулярного взаимодействия становятся больше тепловых, как только расстояние между молекулами стремится стать больше равновесного при данной температуре.

Теория Б. д. объясняет случайные движения частицы действием случайных сил со стороны молекул и сил трения. Случайный характер силы означает, что ее действие за интервал времени τ_1 совершенно не зависит от действия за интервал τ_2 , если эти интервалы не перекрываются. Средняя за достаточно большое время сила равна нулю, и среднее смещение броуновской частицы $\langle \Delta x \rangle$ также оказывается нулевым” (БРЭ [2], статья “Броуновское движение”).

Таким образом, к двум первым атрибутивным свойствам броуновского движения добавляются еще два:

3) коэффициент пропорциональности в законе (1) броуновского движения однозначно определяется как коэффициент диффузии D ,

4) равновесное движение броуновской частицы (в жидкости) — это движение с трением.

Хотя в приведенных выше определениях броуновского движения специальным образом это и не выделено, но закон (1) в неявной форме (как винеровский случайный процесс) предполагает еще один закон — закон независимости средних квадратов проекций смещений:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle = \langle \Delta z^2 \rangle = 2D\tau, \quad (3)$$

$$\text{или } \langle s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle = 4D\tau; \quad \langle S^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle + \langle \Delta z^2 \rangle = 6D\tau, \quad (3')$$

где $\langle s^2 \rangle$ — средний квадрат смещения броуновской частицы в плоскости, а $\langle S^2 \rangle$ — то же в трехмерном пространстве.

3. Броуновское движение и диффузия. Хотя современные теории диффузии в жидкостях гораздо сложнее теории броуновского движения, но последнее по-прежнему связывают с диффузией однозначно.

Цитата 5: “Броуновское движение взвешенных частиц в жидкости можно рассматривать как диффузию. Средний квадрат расстояния r , на которое удаляется броуновская частица за время t , пропорционален ее коэффициенту диффузии: $\langle r^2 \rangle = 6Dt$. Коэффициент D взвешенных частиц определяется их подвижностью b (коэффициент пропорциональности между постоянной внешней силой и скоростью), причем $D = kTb$ (соотношение Эйнштейна, установленное в 1905 г.)” (ФЭ [1], статья “Диффузия” (выделено мной — Л. С.)).

Однако априорно нет оснований считать, что поведение одиночной частицы в среде без градиентов термодинамических величин (таких как концентрация частиц, температура, давление, плотность среды, химический потенциал и др.) должно описываться теми же самыми законами движения с теми же самыми параметрами, что и поведение статистического ансамбля таких частиц при наличии градиента соответствующих термодинамических величин (явления хемо-, термо-, бародиффузии и т.п.). Более того, в случае классической диффузии (диффузии в узком смысле слова) именно градиенты соответствующих величин выступают в качестве “постоянной внешней силы”, т.е. причиной диффузионного массового потока является градиент некоторой термодинамической величины, и именно поэтому диффузионный поток — векторная величина, направление которой определяется вектором градиента*.

* Часто можно встретить утверждение: “Причиной диффузии является тепловое движение

В случае классического броуновского движения любые подобные градиенты и внешние силы отсутствуют, и причин для векторного (однонаправленного) движения броуновской частицы просто нет. Именно поэтому в цитате 4 и делается вывод, что “среднее смещение броуновской частицы $\langle \Delta x \rangle$ также оказывается нулевым”.

Таким образом, в цитате 5, с одной стороны, отображены довольно пространственные трактовки соотношения броуновского движения и диффузии. С другой — в ней есть, по меньшей мере, три сомнительных или неоднозначно трактуемых положения.

Во-первых, уравнение (1) трактуется в ней как определяющее “средний квадрат расстояния r , на которое *удаляется* броуновская частица за время t ”. К сожалению, это выражение принципиально двусмысленно и чаще всего понимается неверно.

Ошибочная трактовка предполагает, что через время t вероятность найти частицу на расстоянии $r = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$ от ее начального положения x_0 максимальна (для одномерного движения). Однако если мы принимаем положение, что математической моделью броуновского движения является винеровский случайный процесс, то *максимальная вероятность* найти частицу через любое время t по-прежнему остается при нулевом смещении от начального положения, поскольку для винеровского процесса математическое ожидание для смещения равно нулю! Именно это и отмечается в цитате 4: “Средняя за достаточно большое время сила равна нулю, и среднее смещение броуновской частицы $\langle \Delta x \rangle$ также оказывается нулевым”. Изменяется (увеличивается пропорционально t) только *дисперсия* распределения проекций смещений по их длине.

Недоразумение с трактовкой смысла величины $\langle \Delta x^2 \rangle$ происходит из-за того, что при математическом ожидании $\mu = 0$ дисперсия распределения проекций смещений $\langle \Delta x_i \rangle$ численно равна среднему квадрату проекций:

$$\sigma_{\text{выб}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i - \mu)^2}{N - 1} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2}{N - 1} = \langle \Delta x^2 \rangle. \quad (4)$$

Таким образом, величина $\sigma_{\text{выб}} = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 / N}$ — это *стандартное отклонение распределения смещений $\langle \Delta x_i \rangle$* , а закон (1) броуновского движения определяет не “среднее расстояние r , на которое уходит частица за время t ”, а дисперсию распределения плотности вероятности найти частицу вблизи точки ее нахождения в начальный момент времени t_0 . Именно стандартное отклонение распределения $\sigma_{\text{выб}}$ растет пропорционально \sqrt{t} , тогда как само среднее смещение при любом времени t для винеровской случайной величины остается равным нулю: $\langle \Delta x \rangle \approx \mu = 0$.

При численном равенстве дисперсии и среднего квадрата смещения $\sigma_{\text{выб}}^2 = \langle \Delta x^2 \rangle$ физически содержательное толкование этих величин различно. Если мы считаем что формула (1) определяет зависимость среднего квадрата смещения от времени, то мы приходим к выводу, что максимальная вероятность най-

молекул”. Однако тепловое движение молекул есть необходимое, но не достаточное условие диффузии, поскольку в отсутствие градиентов термодинамических величин тепловое движение молекул не ведет к возникновению и поддержанию диффузионного потока (массопереноса).

ти частицу на расстоянии $r^2 = \langle \Delta x^2 \rangle$ растёт пропорционально времени. Этой трактовке соответствует распределение вероятностей, показанное на рис. 1а.

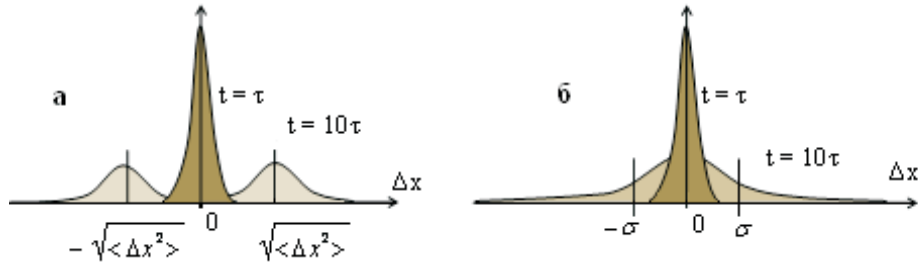


Рис. 1. Поведение винеровского “ансамбля” смещений во времени.
а – ошибочная трактовка, б – правильная трактовка.

Если же мы полагаем, что формула (1) выражает дисперсию распределения смещений, то мы должны считать, что на отрезке $[-\sigma, +\sigma]$ в среднем располагаются 68% всех смещений $\langle \Delta x_i \rangle$ (рис. 1б) с учетом того, что винеровский процесс характеризуется нормальным законом распределения.

Во-вторых, в цитате 5 утверждается, что “коэффициент D взвешенных частиц определяется их подвижностью b (коэффициент пропорциональности между постоянной внешней силой и скоростью), причем $D = kTb$ ”. Но классическое броуновское движение частицы происходит в отсутствие каких-либо внешних сил, а случайные силы (ударов молекул и трения), как справедливо указано в цитате 4, “за достаточно большое время равны нулю”. Достаточно большое время это и есть время, позволяющее осреднить силы (ударов молекул и трения) настолько, чтобы считать их “постоянными”. Но, согласно определению броуновского движения, постоянные внешние силы равны нулю, не говоря уж о том, что понятие “скорости, пропорциональной этим силам”, либо вообще не применимо к броуновскому движению частицы (в силу отсутствия производных в каждой точке ее траектории), либо весьма неоднозначно (среднее арифметическое, квадратичное, наиболее вероятное и т. д.), т. е. и в этом определении мы сталкиваемся с возможностью весьма неоднозначной трактовки его смысла.

В-третьих, диффузия в той же самой статье определяется следующим образом.

Цитата 6: “Диффузия – частный случай явлений переноса, относится к явлениям массопереноса. <...> Диффузия – **необратимый** процесс, один из источников **диссипации** энергии в системе. Скорость диффузии (диффузионный поток) ... в бинарной смеси ... пропорциональна **градиенту концентрации** ... $j = -D\nabla\rho$ ” (ФЭ [1], статья “Диффузия” (выделено мной – Л. С.)).

Иначе говоря, диффузия – это **векторный** поток массы, направление которого задается **градиентом** термодинамической величины (в данном случае – градиентом плотности частиц). Градиент эквивалентен действию некоторой постоянной силы. А какая **векторная** сила действует на броуновскую частицу? Направление каждого очередного смещения броуновской частицы по опреде-

лению случайно, и для винеровской случайной величины математическое ожидание его среднего значения равно нулю.

Таким образом, ни один существенный (атрибутивный, необходимый, неотъемлемый) признак явления диффузии к движению броуновской частицы не применим, а цитата 5 в части переноса представлений диффузии на трактовку сути броуновского движения частицы оказывается малосодержательной или просто ошибочной*.

4. О движении броуновской частицы как движении с трением. Четвертый атрибут современного описания движения броуновской частицы в жидкости как движения с трением еще более сомнителен, хотя и входит практически во все справочно-энциклопедические и учебные определения (см., например, цитату 4 и еще более уверенное и подробное описание трения как необходимого атрибута броуновского движения в “Фейнмановских лекциях по физике” [5]).

Между тем, в той же физической энциклопедии по поводу сил трения сказано следующее.

Цитата 7: “Трение внешнее — механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Сила сопротивления F , направленная противоположно относительно перемещения тел, называется силой трения. Трение внешнее — **диссипативный** процесс, сопровождающийся выделением тепла, электризацией тел, их разрушением и др.” (ФЭ [1], статья “Трение внешнее” (выделено мной — Л. С.)).

Следует ли отнести трение, возникающее между броуновской частицей и жидкостью, к внешнему трению? Если считать броуновскую частицу микрометрового диапазона *макротелом* (поскольку на ее поверхности “укладывается”, по крайней мере, 10^3 площадей, приходящихся на одну молекулу в жидкости), то — да, следует. Но тогда мы неизбежно сталкиваемся с неким термодинамическим парадоксом. В этом случае трение — диссипативный процесс (цитата 6), и, следовательно, броуновская частица при движении совершает работу, причем в этом смысле совершенно не важно, что “средняя за достаточно большое время сила равна нулю” (цитата 4). Работа, совершаемая броуновской частицей в процессе движения, нулю не равняется, а постоянно увеличивается. Иначе говоря, с этой точки зрения, движение броуновской частицы — это бесконечно повторяющиеся циклы: переход тепловой энергии движения молекул в механическую энергию движения частицы, механической (в результате трения) — в тепловую и т. д. Но при диссипативном процессе такие переходы не могут совершаться со 100%-м КПД! Либо частица должна остановиться, либо жидкость будет постоянно нагреваться без какой-либо затраты энергии со

* Следует отметить, что излишне однозначная связь явлений диффузии с явлением броуновского движения имеет историческое обоснование: оба эти явления служили “орудием” в борьбе двух научных течений конца XIX — начала XX века — ‘энергетизма’ и ‘атомизма’. В конце концов, именно эксперименты с броуновским движением заставили главу школы энергетизма, члена Петербургской АН, нобелевского лауреата В. Ф. Оствальда признать победу молекулярно-кинетических воззрений на природу теплоты. Но в пылу этой борьбы общие свойства броуновского движения и диффузии были доведены практически до “тождественности” самих этих явлений, что ныне мешает использовать их *отличающиеся* свойства для нужд развития нанотехнологий.

стороны *внешних* сил.

С другой стороны, хаотическое тепловое движение самих молекул в жидкости мы не рассматриваем как движение с трением. Хотя в принципе для движения молекулы мы можем ввести точно такую же математическую модель винеровского случайного процесса и вычислять дисперсии распределения ‘пробегов’ Δ_i молекулы, измеренных за фиксированные промежутки времени τ , много большие, чем среднее время соударения между молекулами. Аналогичным способом мы можем вычислить затем для молекулы те же самые макропараметры: коэффициент диффузии D , вязкости μ , подвижности b , — но ‘о движении молекулы с трением’ вопроса справедливо не ставим. Ибо диссипация энергии трения внешнего при движении *макротела* в жидкости определяется, прежде всего, созданием ‘спутного потока’ жидкости, увлекаемого телом, который затем диссипирует (переходит) в тепловую энергию. Подобных процессов (создания спутного потока) при движении молекул заведомо нет.

В случае броуновских частиц мы имеем дело с явно *промежуточным* характером движения между чисто молекулярным и классическим механическим. Если частица микрометрового диапазона за время τ переходит из точки 1 в точку 2, то соответствующее количество жидкости должно детерминированно переместиться из точки 2 в точку 1. Однако это перемещение жидкости будет направлено прямо противоположно движению частицы, т. е. мы имеем дело не с созданием спутного потока, а с противоположным процессом.

Причина, по которой мы определяем движение броуновских частиц как движение с трением, носит скорее психологический, нежели физический характер. Поскольку при выводе таких макропараметров, как коэффициент вязкости μ и подвижность b , для макротел активным ‘движителем’ является само тело, вернее, действующая на него внешняя сила (например, сила тяжести), то мы привычно переносим такие представления на движение броуновских частиц. Часть энергии внешней силы уходит на создание направленного движения среды, увлекаемой телом (создание спутного потока), которая затем переходит в тепло. Таким же ‘активным’ телом мы привычно полагаем и броуновскую частицу, заменив внешнюю силу на силу “нескомпенсированных ударов молекул”, которая ‘заставляет’ двигаться броуновскую частицу ‘сквозь жидкость’. На самом деле в случае броуновского движения в жидкости частица не играет активной роли в собственном передвижении. Ее движение полностью определяется флуктуационной перестройкой структуры жидкости, поэтому она не увлекает при своем движении жидкость, и вязкостное трение отсутствует. Подчеркнем, причина этого заключается в том, что из-за сильных межмолекулярных связей температура жидких сред проявляется не в помоллекулярном хаотическом движении, а в постоянной структурной перестройке жидкости, например в кластеризации воды [3, 4]. И броуновская частица является скорее ‘пассивным’ индикатором таких перестроек, чем ‘активным’ телом, увлекающим за собой жидкость.

Таким образом, законы движения броуновских частиц отличаются как от движения макротел, так и от движения молекул. Другой вопрос, насколько наличие броуновской частицы влияет на характер тепловых флуктуаций в данной жидкости. Исследование ‘физического механизма’ взаимодействия броуновских частиц с флуктуационной динамикой жидкости делает эксперименты

с ними весьма ценным инструментом изучения всех этих явлений, составляющих необходимый компонент развития нанотехнологий.

В силу важности эта проблема требует отдельной работы. Здесь мы ограничимся иллюстрацией только одного экспериментального факта, свидетельствующего в пользу флуктуационной модели механизма броуновского движения.

В растворах канифоли, довольно часто используемых в экспериментах по броуновскому движению в качестве 'источника' частиц, при некоторых условиях наряду с отдельными частицами размером 1–5 мкм образуются довольно длинные устойчивые цепочки частиц, фотография одной из которых приведена на рис. 2 (слева).

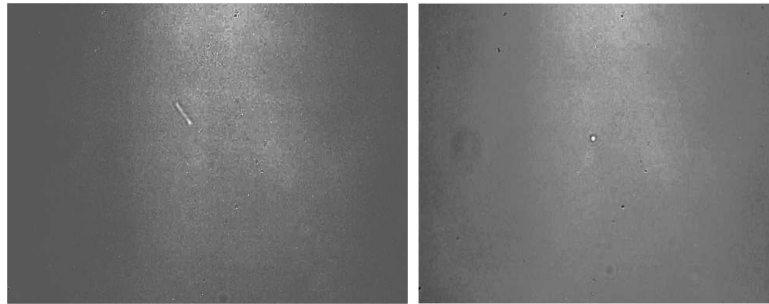


Рис. 2. Броуновская частица в виде цепочки.

Цепочка обычно состоит не менее чем из десяти частиц, соединенных гибкими, но неразрывными связями. Справа показан кадр фильма с той же цепочкой, повернувшейся перпендикулярно плоскости зрения микроскопа ХУ. Диаметр цепочки, соответствующий ее видимому на втором кадре концу, примерно 5–7 мкм. За время съемки 200 кадров (200 с) перемещение цепочки в плоскости ХУ примерно соответствует перемещению одиночной частицы такого же диаметра (5–7 мкм), а одиночные смещения цепочки (от кадра к кадру), в том числе и в направлении, перпендикулярном ее длинной оси, вполне сопоставимы со средними смещениями одиночной частицы. Это было бы невозможно, если бы такая цепочка двигалась в жидкости с сопротивлением трения.

Такой вывод подтверждается и наблюдениями за другими одиночными броуновскими частицами, оказавшимися рядом с цепочкой. Их движение никаким заметным образом не зависит от движения самой цепочки. Это также было бы невозможно, если бы цепочка двигалась в жидкости с трением. В этом случае ее сопровождал бы спутный поток жидкости, создаваемый вязкостным трением, который неминуемо увлекал бы другие частицы, оказавшиеся поблизости (на расстояниях, сопоставимых с длиной цепочки), чего мы экспериментально не наблюдаем.

1.2. Конкретизация задачи исследования

Таким образом, основная цель данной работы заключается в том, чтобы на экспериментальном уровне показать, что жидкости в отличие от газов характеризуются некоторым промежуточным *структурным уровнем*, для которого было бы целесообразно вводить свои характерные 'мезопараметры', отличные

как от микро-, так и от макропараметров. Естественно, что при достаточно большом усреднении эти мезопараметры должны переходить в макропараметры, характеризующие среду по отношению к движению макротел.

Обсуждаемые ниже экспериментальные данные охватывают только часть обозначенных проблем. Конкретные задачи исследования можно сформулировать следующим образом.

1. Убедиться, что закон (1) описывает дисперсию распределения проекций смещения Δx_i при том, что математическое ожидание самого среднего смещения $\langle \Delta x \rangle = 0$.
2. Проверить линейность закона (1) (т.е. линейность зависимости $\langle \Delta x^2 \rangle$, $\langle \Delta y^2 \rangle$, $\langle s^2 \rangle = f(t)$) как при малых ($N \sim 100$), так и при больших ($N \sim \sim 1000$) числах регистрируемых последовательных положений частицы.
3. Проверить справедливость утверждений о независимости средних квадратов проекций (3): $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$ и $\langle \Delta s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle = 2\langle \Delta x^2 \rangle$ при малых и больших N .
4. Проверить постоянство коэффициента пропорциональности D уравнения (1) для малых и больших N и его совпадение с коэффициентом диффузии уравнения (2) для сферических частиц.

В качестве дополнительной, но методически весьма важной задачи в силу сложившихся неоднозначностей трактовки принятой терминологии предстоит вернуться к определению смысла терминов и сделать это на примере их применения к экспериментально фиксируемому результату движения броуновских частиц.

2. Описание экспериментальной установки

Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 3.

В установке использован микроскоп “Биолам” с объективом $\times 40$ и присоединенной к нему веб-камерой “Trust” (разрешающая способность 1280×1024 пкс). Веб-камера соединена с компьютером для наблюдения, регистрации и обработки видеопленки движения броуновских частиц. С учетом увеличения видимого поля микроскопа на экране компьютера общее увеличение установки не менее 10^3 . В качестве осветителя микроскопа использован светодиод синего цвета. Применение светодиода, имеющего относительно узкую спектральную полосу излучения по сравнению с обычными осветителями микроскопов, позволяет уменьшить оптический ореол, возникающий вокруг частицы в растворе, и тем самым увеличить резкость ее изображения.



Рис. 3. Установка “Броуновское движение”.

Программа записи и обработки видеofilьмов позволяет делать покадровые снимки с регулируемым временем между кадрами (1–60 с) и числом кадров фильма до 200.

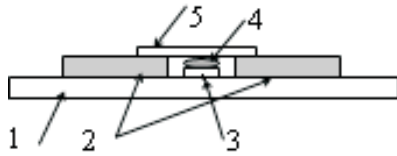


Рис. 4. Микрокувета.

Схематически микрокувета (ее разрез) для растворов броуновских частиц изображена на рис. 4. На стеклянную подложку (1) наклеены две опорные стеклянные полосы (2), между которыми расположено прямоугольное основание микрокуветы (3) (предметное стекло) размером 7×8 мм. Верхняя поверхность предметного стекла расположена на 1,0 мм ниже верхней поверхности опорных полос. На основание микрокуветы шприцем наносится капля раствора (4) и сверху накладывается покровное стекло (5) толщиной $\delta = 150$ мкм.

Таким образом, между покровным стеклом и основанием создается пространство высотой ~ 1 мм, заполненное раствором. Во избежание капиллярного втягивания раствора в зазор между покровным стеклом и опорными полосами предметное стекло отдалено от торцов опорных полос на 2 мм. Чтобы движение окружающего воздуха не создавало в капле микропотоков, покровное стекло по краям оклеивается лентой “скотч” вместе с подложкой, изолируя пространство капли раствора от окружающего воздуха. Это способствует также уменьшению испарения капли, так что с раствором можно работать до 10 часов без заметного уменьшения объема жидкости капли.

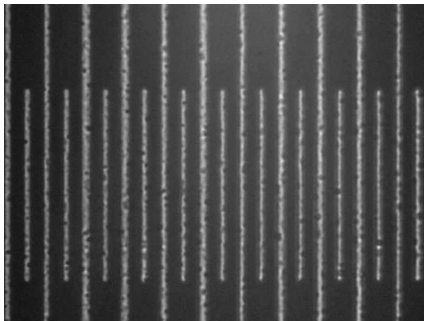


Рис. 5. Шкала: 1–100.

Видимое поле кадра фильма (пространство перемещения частиц в процессе съемки видеofilьма) имеет размеры 110×80 мкм. Абсолютные размеры определены с помощью объектмикрометра с ценой деления 5 мкм. Видеокадры с изображением шкалы объектмикрометра показаны на рис. 5.

После настройки микроскопа на изображение поля с движущимися частицами (в поле кадра обычно видно несколько частиц) включается программа автоматической съемки последовательности из 200 кадров с шагом по времени, равным τ , который можно устанавливать в диапазоне от 1 до 60 с. Обычно для частиц диаметром 1–5 мкм устанавливается $\tau = 1 - 3$ с, поскольку при больших τ велика вероятность ухода частицы за пределы поля. При $\tau = 1 - 3$ с время съемки 100–200 кадров равно 100–600 с соответственно.

После съемки видеofilьма программа позволяет покадрово возвращать изображения на экран компьютера и установкой специальной метки фиксировать координаты X и Y выбранной частицы с точностью ± 1 пкс.

2.1. Технические данные установки

Табл. 1. Технические данные установки

Параметр	Величина
1. Максимальное увеличение системы	$3 \cdot 10^3$
2. Размер капли раствора с броуновскими частицами	Диаметр $d \approx 7$ мм, высота капли $\delta \approx 1$ мм
3. Видимое поле кадра, оставаясь в котором, частицы доступны для регистрации координат X, Y	110×85 мкм
4. Цена деления отсчета координат X и Y	7,38 пкс/мкм
5. Чувствительность к определению координат частиц X и Y	± 1 пкс
6. Точность регистрация координат X и Y при уходе частицы с плоскости максимальной резкости объектива (т. е. по оси Z) на ± 15 мкм	Не менее ± 3 пкс
7. Регулируемый межкадровый период съемки	$\tau = 1-60$ с (через 1 с)
8. Максимальное число кадров видеофильма	200

2.2. Особенности физических условий эксперимента

1. Влияние внешних факторов на экспериментальные результаты.

К основным факторам, способным оказать влияние на результаты измерений, можно отнести движение окружающего воздуха и испарение капли, образующие микротечения в жидкости, а также изменение температуры раствора и необходимость подстройки глубины резкости из-за ухода частицы в вертикальном направлении. Первые два фактора легко устраняются с помощью изоляции капли оклеиванием внешнего периметра покровного и предметного стекла полосками скотч-ленты. В этом случае даже значительные потоки воздуха вне микроюветы (“ветер”) уже не влияли экспериментально заметным образом на движение жидкости. Такая изоляция капли раствора настолько замедлила ее испарение, что капля сохранялась в течение суток.

Поскольку в данных экспериментах мы не ставили задачи исследования температурной зависимости параметров броуновского движения, то для контроля температуры достаточно было предварительно выдержать ювету с раствором при комнатной температуре, а во время измерений контролировать температуру по комнатному термометру.

При общем коэффициенте увеличения установки, равном примерно 3000, даже незначительные толчки и вибрации микроскопа могут повлиять на результаты. Поэтому микроскоп был установлен на массивное основание вдали от всяких источников тепла и вибрации. Отсутствие вибрации легко контролируется, например, по записи фильма с изображением шкалы объектмикрометра.

2. Выбор параметров частиц и определение их размера.

Для сформулированных выше задач все эксперименты удобнее проводить на максимально одинаковых растворах. В качестве такового использовался слабый водный раствор канифоли, предварительно разведенной в этиловом спирте и отстоявшейся в течение достаточного времени для “монодисперсизации” частиц за счет гравитационной седиментации. Приготовленный таким образом раствор был

достаточно монодисперсен (частицы 1,0–2,5 мкм).

Из-за дифракции света на частицах и изменения физических свойств приповерхностного слоя воды вокруг них (плотности и коэффициента преломления) определение размера частиц непосредственно в растворе представляет неопределенную задачу. Поэтому для определения их истинного размера применялась следующая методика. На покровное стекло наносилась капля водного раствора канифоли и высушивалась. Поверхность стекла после этого рассматривалась в микроскоп. Пример кадра с броуновскими частицами, оставшимися на покровном стекле после высыхания капли исследованного раствора, показан на рис. 6.

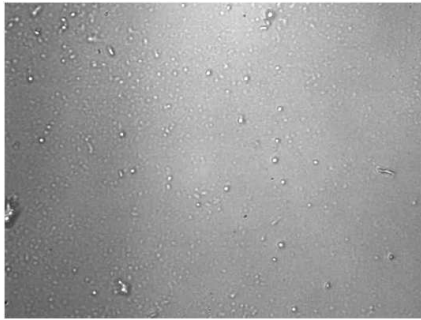


Рис. 6. Частицы на покровном стекле.

Из-за дифракции данная методика не позволяет определять размер частиц точнее, чем $\pm 25\%$, хотя точность определения относительных размеров частиц в одном и том же растворе выше. Следует отметить, что точность определения координат частицы гораздо выше и равна 3–5%.

Калибровка лимба вертикального перемещения объектива (ось Z) проводилась по толщине покровного стекла, предварительно измеренной с помощью микрометра. По лимбу регистрировалась настройка на резкое изображение сначала

верхней, затем нижней поверхностей покровного стекла, и толщина стекла делилась на соответствующее число делений лимба. Таким методом было определено, что цена одного малого деления лимба (масштаб по оси Z) составляет $4,7 \pm 0,47$ мкм.

Заметим, что, в принципе, дифракция на частицах может быть использована не только для более точного определения их размеров, но и для регистрации их вертикального перемещения в процессе эксперимента, т. е. для регистрации не двух, а всех трех координат смещения. Однако для этого потребуются некоторое усложнение самой установки и дополнительные исследования влияния оптических параметров поверхностного слоя воды, окружающего броуновскую частицу.

3. Обсуждение методических проблем

Понятия, используемые при описании броуновского движения, будем определять на примерах анализа экспериментальных данных по движению броуновской частицы.

3.1. 'Учебный' и 'винеровский' методы обработки результатов измерений

Непосредственными экспериментальными данными по движению броуновской частицы являются ее последовательные пространственные положения (x_i, y_i) , зафиксированные через заданный временной промежуток τ . Эти точки со-

единяются отрезками прямых, называемыми ‘смещениями’ и образующими то, что обычно называется ‘траекторией’ частицы.

На рис. 7 приведен пример траекторий в трех последовательно снятых фильмах частицы 1к, 2к и 3к. Каждая траектория содержит $N = 200$ точек. Оси координат — в пкс (1 мкм = 7,38 пкс). Кружками обозначены начало и конец каждой траектории. Соответственно, каждая траектория содержит $N - 1 = 199$ смещений.

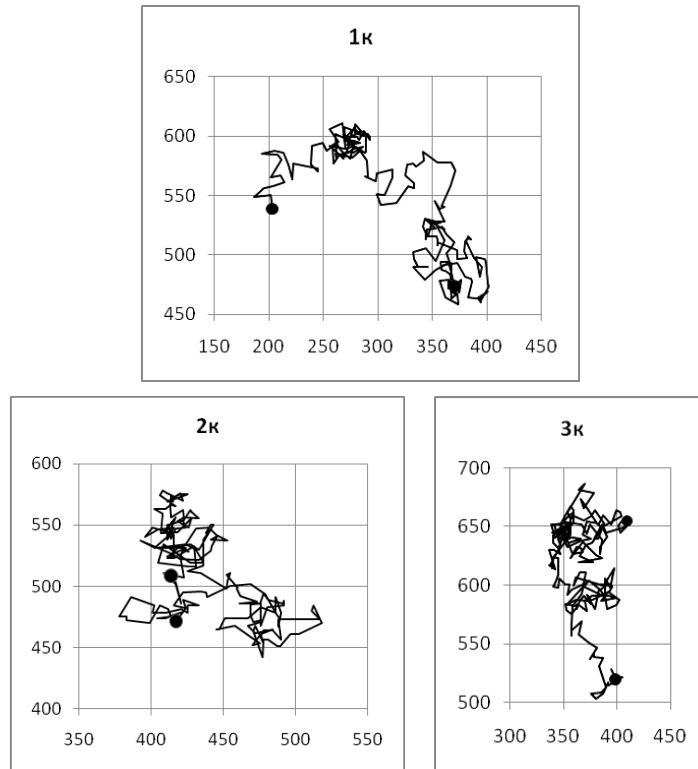


Рис. 7. Траектории частицы фильмов 1к, 2к и 3к.

Статистическая обработка траекторий заключается в нахождении средних значений проекций смещений и их квадратов $\langle \Delta x \rangle_n$, $\langle \Delta x^2 \rangle_n$ и $\langle \Delta y \rangle_n$, $\langle \Delta y^2 \rangle_n$ для дискретного ряда времен $t = n\tau$, $n = 1, 2, \dots, t$.

Обратим внимание, что в настоящее время используются две *содержатель-но различные* методики получения этих данных, которые мы условно назовем ‘винеровской’ и ‘учебной’.

1. Винеровская методика обработки строго соответствует математической модели броуновского движения, которая описывается следующим образом.

Цитата 8: “Винеровский процесс — случайный процесс, служащий математической моделью броуновского движения. В.п. определяется как случайный процесс $X(t)$ с непрерывным временем $t \in T$ (обычно $= [0, \infty)$) и с $X(0) = 0$, приращения которого за *неперекрывающиеся промежутки*

времени взаимно независимы, при этом $X(s+t) - X(s)$ при любом s имеет нормальное распределение с **нулевым математическим ожиданием** и **дисперсией t** (Математический энциклопедический словарь [6], статья “Винеровский процесс”).

Более подробно математическая теория броуновского движения как винеровского случайного процесса изложена в книге французского математика, академика П. Леви [7]. В частности, П. Леви в явном виде определяет следующие исходные постулаты математической модели броуновского движения.

Цитата 9: “*Стохастический процесс, который мы будем называть линейным* броуновским движением, есть схема, хорошо передающая свойства реального броуновского движения, наблюдаемого на достаточно малой (но не бесконечно малой) временной шкале, и предполагающая, что такие же свойства имеют место на любой шкале. Здесь*

- *исчезает понятие свободного пробега, в течение которого движение отдельной молекулы ... существенным образом равномерно и прямолинейно;*
- *каждая молекула за конечное время пробегает бесконечный путь,*
- *а любая из ее координат есть функция, не имеющая производной и принимающая бесконечное число раз максимальные и минимальные значения в любом интервале” [7, с. 26].*

(Разбито на абзацы и выделено мной — Л. С).

В нашем случае $t = n\tau$, а случайная величина $X(t)$ — множество смещений $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В соответствии с этой моделью, для $n = 1$ (т.е. для $t = \tau$) при $N = 200$ мы имеем 199 проекций для получения средних величин $\langle \Delta x \rangle_1$, $\langle \Delta x^2 \rangle_1$: $\Delta x_1 = x_1 - x_2$, $\Delta x_2 = x_2 - x_3$, $\Delta x_3 = x_3 - x_4, \dots$. Для получения следующей точки закона (1), т.е. для $n = 2$, в соответствии с этой методикой, усреднения соответствующих проекций $\langle \Delta x \rangle_2$, $\langle \Delta x^2 \rangle_2$ мы вынуждены делать по вдвое меньшему числу проекций, полученных по алгоритму $\Delta x_1 = x_1 - x_3$, $\Delta x_2 = x_3 - x_5$, $\Delta x_3 = x_5 - x_7$ и т.д. Таким образом, усреднение для $n = 10$ (т.е. для $t = 10\tau$) мы должны делать уже не по 199, а всего лишь по 19 проекциям. Из этого следует, во-первых, что по $N = 200$ нельзя получить данные для проверки закона (1) более чем по 10 точкам. Во-вторых, с ростом числа n быстро (в n раз) уменьшается статистический вес точек, т.е. увеличивается случайная погрешность их определения.

2. Учебная методика обработки экспериментальных данных. Быстрое уменьшение статвеса усредненных данных с ростом n привело к введению в практику обработки другой методики, описанной, например, в [8]. В соответствии с этой методикой, например, для $n = 15$ (т.е. для $t = 15\tau$) мы должны вычислять проекции по алгоритму $\Delta x_1 = x_1 - x_{15}$, $\Delta x_2 = x_2 - x_{16}$, $\Delta x_3 = x_3 - x_{17}$ и т.д. Таким образом, величины $\langle \Delta x \rangle_{15}$ и $\langle \Delta x^2 \rangle_{15}$ мы будем получать усреднением по $200 - 15 = 185$ проекциям. И даже для точки $n = 50$ (т.е. для $t = 50\tau$) мы усредняем результаты по 150 проекциям, что дает практически одинаковый статвес всех точек от $t = \tau$ до $t = 50\tau$.

* Т.е. одномерным — Л. С.

Однако необходимо заметить, что такая методика обработки данных не соответствует математической модели броуновского движения как винеровской случайной величины, поскольку для получения средних величин $\langle \Delta x \rangle_n$, $\langle \Delta x^2 \rangle_n$, начиная с точки $n = 2$, в ней используются смещения, *перекрывающиеся по времени*. Поэтому мы условно назвали данную методику ‘учебной’, учитывая тот факт, что именно она чаще всего рекомендуется в лабораторных практикумах вузов для обработки броуновского движения.

3.2. Что такое *экспериментально* определяемые величины ‘смещение’, ‘квадрат смещения’ и ‘дисперсия’?

Этот вопрос отнюдь не лишний, поскольку их теоретические и экспериментально определяемые значения имеют отличия, связанные с тем, что в эксперименте мы всегда имеем дело не с генеральной совокупностью случайной величины, а с выборочными величинами. Поясним это на примере обработки траектории частицы 1к, показанной на рис. 7.

1. Понятие ‘траектория’ броуновской частицы. Прежде всего заметим, что понятие ‘траектория’, используемое по отношению к экспериментальным данным движения броуновской частицы, имеет всего лишь *условное* значение. Реальной траектории движения частицы принадлежат только дискретные точки (x_i, y_i) (в рассматриваемом случае их 200), а все соединяющие их отрезки Δs_i проведены нами и *никакого отношения к реальной траектории частицы не имеют*. Между каждой последовательной парой точек сама частица могла двигаться как угодно. Если бы мы сняли данные для $\tau = 0,01$ с, то вместо каждого смещения Δx_i получили бы целую ‘траекторию’ из 100 новых смещений, не менее сложную, чем отображенная на рис. 7. Это принципиально отличает понятие ‘траектория’, используемое в классической механике, от понятия ‘траектория броуновской частицы’. В механике траектория действительно содержит все точки пространства, в которых последовательно во времени находилась материальная точка. Здесь отрезками прямых мы фиксируем только *смещения* частицы за время τ , а *не путь*, пройденный частицей.

Второе принципиальное отличие понятия ‘траектория’ в механике от применяемого по отношению к характеристике экспериментальных данных движения броуновской частицы заключается в том, что траектория тела — это достаточно гладкая в математическом смысле функция, имеющая разве что конечное и относительно небольшое число особых точек, в которых отсутствуют производные. Напротив, траектория броуновской частицы, хотя и всюду непрерывна, однако ни в одной точке не имеет производной (цитата 9). Следовательно, к описанию движения броуновской частицы *не применимы понятия скорости и ускорения*, а значит, *не применим и аппарат дифференциальных уравнений* типа уравнения Ньютона $F = ma = m \cdot d^2r/dt^2$ в целом, о чем по какой-то причине в учебных курсах часто забывают (см., например, [5]). По определению винеровской случайной величины, траектория броуновской частицы в каждой точке имеет излом, т. е. производная слева в каждой точке не равна производной справа, что делает дифференциальные уравнения для описания движения броуновской частицы лишены смысла. Этот же вывод следует и из приведенного выше примера: каждое смещение Δx_i , полученное за время τ , можно

представить в виде траектории из 100 смещений, полученных за $\tau' = 0,01\tau$, и т. д.

2. Что такое ‘средняя проекция смещения’. По определению среднего, она равна для выборочной совокупности

$$\langle \Delta x \rangle_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i}{N-1}. \quad (5)$$

Для винеровского процесса эта величина равна математическому ожиданию μ проекции смещения Δx . В силу того, что на любом конечном участке траектории частица теоретически совершает бесконечное число смещений (цитаты 8, 9), для нее теоретическое $N \rightarrow \infty$ и $\langle \Delta x \rangle \rightarrow \mu = 0$. Подчеркнем: в теоретически определяемую величину $\langle \Delta x \rangle$ мы должны были бы подставлять не фиксируемое нами в эксперименте число смещений $N-1$, а то, которое действительно совершает сама частица за время τ . Постулат о том, что на любом конечном участке $N = \infty$, и является основанием для теоретического заключения, что математическое ожидание для винеровского процесса, описывающего броуновское движение, равно нулю.

Для обработки экспериментальных ‘траекторий’, например приведенных на рис. 7, вполне очевидно, что средняя выборочная проекция смещения, определенная по формуле (5), будет равна разнице координат первой и последней точек траектории, деленной на число смещений между ними:

$$\langle \Delta x \rangle_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i}{N-1} = \frac{x_{200} - x_1}{199}. \quad (6)$$

Очевидно, что при относительно малых N эта экспериментальная величина *практически никогда не будет равна нулю*, поскольку маловероятно, что частица закончит свое движение точно в той же точке, из которой начала его. В частности, для частицы 1к $\langle \Delta x \rangle_1 = 0,8$ при стандартном отклонении модуля проекции смещения $(\langle \Delta x^2 \rangle_1)^{1/2} = 7$, т. е. составляет примерно 10% от стандартного отклонения. А вот для частицы 2к ее величина примерно на порядок меньше и не превышает 1% от стандартного отклонения.

Суть расхождения экспериментально определенного значения $\langle \Delta x \rangle$ и теоретического — математического ожидания μ случайной величины Δx — в том, что экспериментальные данные, полученные *по одной* траектории движения *индивидуальной* броуновской частицы, определяют не случайную величину, а фактически однозначно детерминированную для *данной* траектории: $\langle \Delta x \rangle_{\text{выб}} = (x_{200} - x_1)/199$. И только дополнительное усреднение множества таких средних позволяет получить ‘истинное’ (теоретически определенное в винеровском процессе) значение математического ожидания данной величины. Результат этого дополнительного усреднения легко понять на нашем примере представления каждого смещения Δx_i в виде новой траектории, полученной для $\tau' = 0,01\tau$. На основании формулы (6), на каждом Δx_i мы получим новое среднее смещение $\langle \Delta x \rangle'_i = 0,01\Delta x_i$, а для всей траектории теперь уже с $N' = 100N$ величина среднего смещения $\langle \Delta x \rangle' = \sum_{i=1}^{N-1} \langle \Delta x \rangle'_i / (N-1) = 0,01\langle \Delta x \rangle$.

Таким образом, само среднее смещение, определяемое по экспериментальной траектории, в рамках винеровской модели броуновского движения никакой объективной информации о броуновском движении не несет. Формально

оно может оказаться любым, но, оставаясь в рамках винеровской модели, мы должны трактовать его как $\langle \Delta x \rangle = \mu = 0$.

3. Что такое ‘средний квадрат проекции смещения’. Закон (1) броуновского движения записан для среднего квадрата проекции смещения $\langle \Delta x^2 \rangle$. С этим связаны наиболее часто совершаемые ошибки в трактовке его смысла, о чем говорилось выше. По физическому и теоретическому смыслу эта величина определяет *дисперсию распределения проекций смещения*, а не “среднее расстояние”, на которое уходят броуновские частицы за время nt . Разница смысла этих определений была проиллюстрирована выше на рис. 1.

На самом деле закон (1) был получен Эйнштейном не для движения *индивидуальной* броуновской частицы, а в качестве характеристики поведения *статистического ансамбля* броуновских частиц [9, 10]. Однако при определенных условиях закон (1) можно проверять и по экспериментальным данным, полученным по движению индивидуальной броуновской частицы. Эти условия можно реализовать двояким образом. Либо для проверки закона (1) мы должны использовать траектории броуновской частицы при очень большом числе N (гораздо большем, чем $N = 200$). Либо мы должны дополнительно усреднить данные по определенному числу выборок (по числу обработанных траекторий ‘длинной’ в $N = 200$, т. е. по числу фильмов в нашем случае).

Таким образом, наиболее важной величиной, характеризующей закон (1) броуновского движения, является *дисперсия*, численно равная среднему квадрату проекции. Но из-за неравенства нулю выборочного среднего $\langle \Delta x \rangle_{\text{выб}}$ возникает проблема с экспериментальным определением *выборочной дисперсии*. Теоретическое значение дисперсии σ^2 при $\mu = 0$ точно равно величине $\langle \Delta x^2 \rangle$:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (\Delta x_i - \mu)^2}{N - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i^2}{N - 2} = \langle \Delta x^2 \rangle. \quad (7)$$

Однако формально вычисленное экспериментальное выборочное значение дисперсии из-за того, что $\langle \Delta x \rangle_{\text{выб}} \neq 0$, будет также не равно $\langle \Delta x^2 \rangle$: $\sigma_{\text{выб}}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N-1} (\Delta x_i - \mu)^2 \neq \langle \Delta x^2 \rangle$. Правда, даже для большого отклонения $\langle \Delta x \rangle$ от нуля, какое мы имеем, например для частицы 1к (см. рис. 7), отличие выборочной дисперсии от значения $\langle \Delta x^2 \rangle$ не столь велико. Так, для частицы 1к величина $\langle \Delta x^2 \rangle = 50,07$, а дисперсия $\sigma^2 = 49,62$, т. е. отличается менее чем на 1%, хотя сама средняя проекция $\langle \Delta x \rangle_{\text{выб}}$ составляет примерно 10% от стандартного отклонения, равного σ .

Тем не менее мы должны определиться с тем, какое значение нужно брать для проверки закона (1) по экспериментальным траекториям — выборочную дисперсию σ^2 или $\langle \Delta x^2 \rangle$? Не вдаваясь в теоретическое исследование этого вопроса, можно сказать, что исходя из физического смысла следует выбрать значение $\langle \Delta x^2 \rangle$, поскольку *реальное* (а не фиксируемое нами в эксперименте) число смещений частицы на отрезке траектории за времена порядка секунды чрезвычайно велико $N \rightarrow \infty$, и поэтому математическое ожидание смещения $\mu \approx 0$. А это означает, что *реальная* дисперсия будет с высокой точностью равна значению $\langle \Delta x^2 \rangle$. Именно ее мы и будем брать в качестве дисперсии при обсуждении экспериментальных результатов.

4. Что такое ‘средний квадрат смещения’ в плоскости $\langle s^2 \rangle$ и в пространстве $\langle S^2 \rangle$. Для винеровской случайной величины проекции смещения

Δx_i и Δy_i считаются независимыми. Соответственно независимы и их дисперсии $\langle \Delta x^2 \rangle$ и $\langle \Delta y^2 \rangle$. В теории вероятностей имеет место теорема: если случайные величины α и β независимы, то дисперсия их суммы $\sigma^2(\alpha + \beta)$ равна сумме дисперсий $\sigma^2(\alpha) + \sigma^2(\beta)$. На этом основании и записан закон (3')

$$\langle s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle = 4D\tau; \quad \langle S^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle + \langle \Delta z^2 \rangle = 6D\tau.$$

Таким образом, содержательно закон (3'), как и закон (1), характеризует не “квадрат смещения броуновской частицы в плоскости $\langle s^2 \rangle$ и в пространстве $\langle S^2 \rangle$ ”, а соответствующую *суммарную дисперсию* средних проекций смещений $\langle \Delta x \rangle$, $\langle \Delta y \rangle$ и $\langle \Delta z \rangle$.

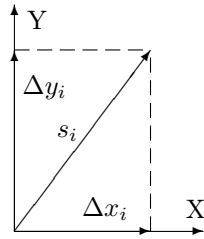


Рис. 8. Индивидуальное смещение s_i .

Формально точно такие же формулы мы получаем для расчета среднего квадрата смещения частицы в плоскости и пространстве. Длина каждого индивидуального смещения s_i^2 определяется соотношением $s_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$ (рис. 8), и для среднего квадрата смещения мы по-прежнему имеем $\langle s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle$. Таким образом, и здесь выбор трактовки двух численно одинаковых величин имеет лишь смысловое значение. В правильной трактовке эта величина определяет дисперсию расплывания ансамбля смещений в плоскости $\sigma_s^2 = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle$. Напомним, что и в этом

случае при определении величины $\mu = \langle s \rangle$ мы должны будем полагать число $N \rightarrow \infty$ и, соответственно,

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (s_i - \mu)^2}{N - 2} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} s_i^2}{N - 2} = \langle s^2 \rangle \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

При неверной трактовке мы должны будем считать, что величина $\langle s^2 \rangle$ показывает “как далеко в среднем уходят частицы за время $n\tau$ ”, и вновь получим нелепое заключение, что ансамбль броуновских частиц через время $n\tau$ ‘расплывется’ в виде кольца вокруг ‘точки запуска’ (начала координат), аналогично показанному на рис. 1а.

3.3. Броуновское движение как статистический ансамбль смещений

В силу устойчивости представлений о том, что уравнение (1) якобы определяет, “как далеко уходит частица за время t ”, еще раз вернемся к этому вопросу. После определения по экспериментальным данным величин Δx_i вся дальнейшая обработка сводится к определению дисперсии распределения этих величин по формуле (7). При этом мы полностью теряем все представления о реальной траектории частицы, поскольку при определении величины σ^2 совершенно не важен порядок слагаемых и к тому же величина $\langle \Delta x \rangle$ в законе (1) принята равной нулю, а не реально получаемому выборочному значению (6). Иными словами, все смещения в (1) рассматриваются как статистический ансамбль смещений. Графически мы должны откладывать их от одной и той же точки, соответствующей $\langle \Delta x \rangle \approx \mu = 0$. Их плотность соответствует нормальному распределению, и в диапазоне $[-\sigma, +\sigma]$ лежит 68% всех смещений.

Таким образом, вопрос о том, “как далеко уходит частица”, вообще лежит вне возможностей теоретической модели броуновского движения как винеровского случайного процесса.

4. Обсуждение экспериментальных данных

Уточнив понятия, используемые при экспериментальном и теоретическом описании броуновского движения как винеровского случайного процесса, мы можем уточнить и формулировку задачи работы. Предстоит проверить условия эксперимента (экспериментальное число N или число выборок по N), при котором формальные характеристики закона (1) хорошо подтверждаются. Формальными характеристиками закона (1) мы считаем следующие.

1. Зависимость от времени среднего квадрата проекции смещения (дисперсии) описывается прямой, проходящей через начало координат: $\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt$.
2. Тангенс угла наклона прямой постоянен и равен коэффициенту диффузии D .
3. Величина коэффициента диффузии D для сферической частицы определяется законом (2).

4.1. Общая характеристика экспериментальных данных

В процессе испытания установки и проверки различных режимов ее работы автором были получены и обработаны фильмы движения более сотни броуновских частиц различного размера и вещества. Естественно, что все эти данные не могут быть даже приведены в одной работе. Основой дальнейшего обсуждения будут 10 фильмов из серии “К”, отснятой специально для обсуждения сформулированных выше задач.

Серия “К” включает 10 фильмов 1к, 2к, ..., 10к по 200 кадров каждый, с шагом по времени между кадрами $\tau = 1$ с. Все данные фильмов получены для движения *одной и той же* броуновской частицы, диаметр которой был равен 1 мкм (точность определения $\pm 25\%$). Время между фильмами примерно 15–20 с. За это время столик микроскопа смещался таким образом, чтобы частица вновь оказалась примерно в центре кадра. Общее время наблюдения за частицей для 10 фильмов составляет примерно 40–50 мин, а общее число зафиксированных смещений частицы за это время $N = 2000$.

Из-за большого объема данных, полученных при обработке всех десяти траекторий 1к–10к, мы вынуждены привести их в виде таблицы (табл. 2), иллюстрируя обсуждаемые положения лишь отдельными более подробными примерами обработки.

В первых десяти строках таблицы помещены данные обработки каждого из фильмов 1к, 2к, ..., 10к. Для пояснения величин, приведенных в табл. 2, в качестве примера на рис. 9 приведены графики зависимостей $\langle \Delta x^2 \rangle = 2D_x n\tau$, $\langle \Delta y^2 \rangle = 2D_y n\tau$ и $\langle s^2 \rangle / 2 = 2D_s n\tau$ при $n\tau = 15$ с для фильма 1к.

Все линейные размеры в табл. 2, а также на рис. 9 даны в пикселях (1 мкм = 7,38 пкс). Временная ось приведена в числах n , что соответствует секундам, поскольку время $t = n\tau$, а для наших фильмов $\tau = 1$ с. Данные для $t = n\tau =$

Табл. 2. Результаты обработки фильмов 1к–10к (начало)

	Параметр	Δx	Δy	D_x			D_y		
	Столбец	1	2	3	4	5	6	7	8
	$n\tau$			7 τ	15 τ	50 τ	7 τ	15 τ	50 τ
1	1к	-0,83	0,31	44,7	55,7	74,00	55,6	66,6	63,0
2	2к	-0,08	0,22	63,80	47,00	46,20	42,20	36,60	44,50
3	3к	0,075	0,68	53,60	43,00	11,90	62,60	56,00	26,00
4	4к	-0,86	-0,54	68,40	71,90	125,0	54,80	53,80	75,40
5	5к	0,23	1,36	71,80	84,80	76,60	71,50	81,00	87,20
6	6к	0,22	0,29	49,50	55,30	71,90	61,30	85,20	92,40
7	7к	0,17	0,49	31,60	16,80	8,90	56,00	28,00	29,90
8	8к	0,36	0,77	45,60	26,30	35,80	42,30	17,80	43,50
9	9к	0,1	-0,43	43,10	32,10	33,20	41,50	41,30	34,00
10	10к	-0,02	-1,05	59,40	49,50	71,00	83,90	97,50	182,00
11	Среднее	-0,06	0,42	53,15	48,24	55,45	57,17	56,38	67,79
12	D_{max}/D_{min}			2,16	5,05	14,04	2,02	5,48	7,00
13	1к, ..., 5к	0,3	-0,4	58,7	59	65,9	58,9	60,3	51,6
14	6к, ..., 10к	-0,17	-0,4	43,1	37,7	43,9	55,1	56,4	70,1
15	1к, ..., 10к	-0,05	0,4	52,6	50,7	54,2	55,8	59,6	61,3

Табл. 2. Результаты обработки фильмов 1к–10к (окончание)

	Параметр	$2D_s$			D_x/D_y	
	Столбец	9	10	11	12	13
	$n\tau$	7 τ	15 τ	50 τ	7 τ	15 τ
1	1к	50,2	61,2	68,7	0,80	0,84
2	2к	53,00	41,80	45,40	1,50	1,28
3	3к	58,10	49,60	19,00	0,86	0,77
4	4к	61,60	35,60	75,40	1,25	1,34
5	5к	71,60	83,00	81,90	1,00	1,05
6	6к	55,40	70,20	82,10	0,81	0,65
7	7к	43,80	22,40	19,40	0,56	0,60
8	8к	44,00	34,80	39,60	1,10	1,48
9	9к	42,30	36,70	33,70	1,00	0,78
10	10к	71,70	73,50	126,40	0,71	0,51
11	Среднее	55,17	50,88	59,16	0,93	0,86
12	D_{max}/D_{min}	1,70	3,28	6,65	2,68	2,91
13	1к, ..., 5к	58,7	59,6	58,7	1,0	0,98
14	6к, ..., 10к	49,1	47	57	0,8	0,67
15	1к, ..., 10к	54,2	55,2	57,7	0,94	0,85

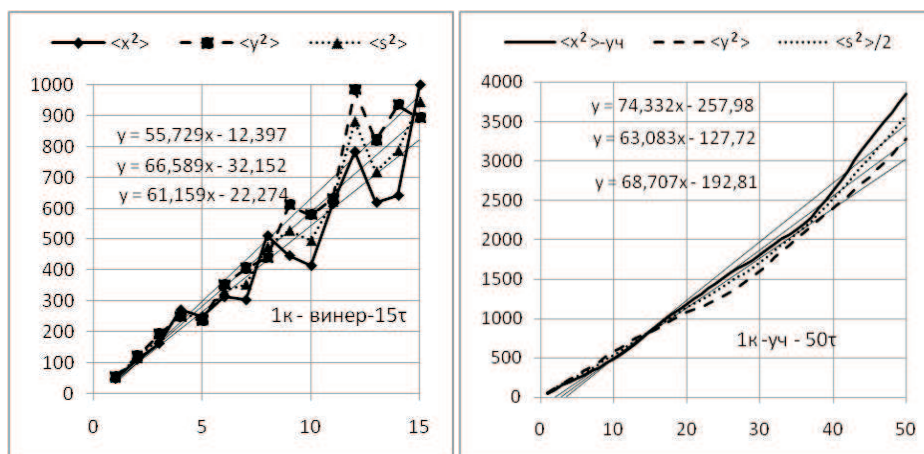


Рис. 9. Данные обработки фильмов.

$= 7\tau$ и $t = 15\tau$ получены по винеровской методике, а данные для $t = 50\tau$ — по учебной, поскольку для $N = 200$ по винеровской методике их получить невозможно.

Для каждой зависимости $\langle \Delta x^2 \rangle = 2D_x n\tau$, $\langle \Delta y^2 \rangle = 2D_y n\tau$, $\langle s^2 \rangle / 2 = 2D_s n\tau$ на графике приведен линейный тренд и его уравнение (сверху вниз соответственно). Угловым коэффициентом при x в уравнениях тренда равен соответствующей величине $2D$. С увеличением n разброс точек на винеровских зависимостях быстро увеличивается, что легко объяснимо уменьшением статистики (усреднение для $n\tau = 15$ производится всего лишь по 13 смещениям). Оси Y на графиках — в квадратных пикселях (пкс²). Вместо полного среднего смещения в плоскости $\langle s^2 \rangle = \langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle$ приведены значения $\langle s^2 \rangle / 2$, чтобы можно было для всех линейных трендов использовать одну формулу для проверки закона (1): $\langle \text{квадрат смещения} \rangle = 2Dn\tau$.

В 11-й строке приведены средние арифметические значения соответствующих величин. Поскольку все фильмы сняты по движению одной и той же частицы, то данные в строке 11 можно рассматривать как усредненные по десяти выборкам, каждая из которых содержит 199 смещений.

В столбцах 12, 13 приведены отношения коэффициентов D_x / D_y , позволяющие судить о том, в какой мере выполняется закон (3) независимости проекций смещений $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$. Отличие средних квадратов D_x / D_y в 0,5–1,5 раза вряд ли позволяет говорить о том, что по индивидуальной траектории из 199 смещений ($N = 200$) можно надеяться с высокой точностью определить такой макропараметр, как коэффициент диффузии D . Однако усреднение по десяти выборкам (строка 11) дает уже вполне приемлемое значение: отношение D_x / D_y не выходит за рамки 15%-го отклонения, т. е. при $N = 2000$ равенство $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$ выполняется с точностью 15%.

В 12-й строке приведено отношение коэффициентов D_{max} / D_{min} соответствующего столбца. Это отношение позволяет судить о том, насколько велик разброс коэффициентов D_x , D_y , если пытаться определять их по траекториям

движения индивидуальной частицы, фиксируя $N = 200$ точек траектории. Как видно из таблицы, для индивидуальных траекторий максимальные коэффициенты D в 2–5 раз превышают минимальные, т. е. и здесь надежда получить макропараметр D по индивидуальной траектории с $N = 200$ напрасна: данные соответствуют теоретическим только по порядку величины.

Данные в строках 13–15 имеют особое значение. Здесь применен искусственный способ “удлинения” траектории. Учитывая, что все десять фильмов сняты по движению одной и той же частицы с перерывом по времени между фильмами в 10–15 с, начало координат каждой последующей траектории было искусственно смещено в последнюю точку предыдущей траектории. Это позволяет увеличить число смещений единой “суммарной” траектории таким образом, что для винеровского метода обработки становится доступным получить данные для $n > 15$. В строке 13 приведены данные для суммарной траектории фильмов 1к, ..., 5к, в следующей — для 6к, ..., 10к, а в последней — для всех десяти фильмов 1к, ..., 10 к. Таким образом, в строках 13, 14 мы имеем суммарную траекторию из $N = 1000$ точек, а в строке 15 — из $N = 2000$ точек.

4.2. Анализ экспериментальных данных

1. Общий результат. Фактически единственной количественной величиной, позволяющей судить о степени экспериментального подтверждения законов (1, 2) броуновского движения, является коэффициент диффузии. Его экспериментальное значение $D_{\text{эксп}}$ мы должны сравнить с теоретическим, рассчитанным по формуле (2).

На основании табл. 2 (столбцы для 7τ , 15τ и строка $D_{\text{max}}/D_{\text{min}}$) можно видеть, что значения $D_{\text{эксп}}$, полученные по каждой индивидуальной траектории, отличаются друг от друга в 2–5 раз. Это означает, что ни по одной из десяти отдельных индивидуальных траекторий с числом точек $N = 200$ каждая о наличии какого-то общего системного макропараметра D судить нельзя. Повидимому, каждая индивидуальная траектория отображает такие особенности флуктуационной структурной микродинамики жидкости, которые не сводятся к одному-единственному макропараметру D . Последний может быть получен только по гораздо большему усреднению.

Для получения этого макропараметра мы двумя способами усреднили данные фильмов: 1) как среднее арифметическое по 10 выборкам (фильмам) и 2) путем образования “суммарных” траекторий по 5 и 10 фильмам.

Среднее арифметическое для всех данных по 7τ , 15τ строки 11 равно $D_{\text{ср1}} = 53,5$. Это значение получено по $N = 2000$. Средние арифметические по суммарным траекториям фильмов 1к, ..., 5к и 6к, ..., 10к (т. е. по $N = 1000$) равны $D_{\text{ср2}} = 59,1$ и $D_{\text{ср3}} = 48,1$ соответственно. Среднее арифметическое суммарной траектории десяти фильмов (т. е. по $N = 2000$) $D_{\text{ср4}} = 54,7$.

Усреднив еще раз все эти данные, окончательно получаем

$$D_{\text{эксп}} = \frac{\sum D_{\text{ср},i}}{5} = 54,9 \approx 55 \text{ (пкс}^2/\text{с)}.$$

2. Расчет теоретического значения коэффициента диффузии и сравнение его с экспериментальным. Эйнштейновский коэффициент диффузии

для сферической частицы равен

$$D = kT/6\pi\eta a.$$

В нашем случае радиус частицы $a = 0,5$ мкм. Плотность вещества частицы с достаточным основанием можно принять равной плотности воды, поскольку частица обладает “нулевой” плавучестью. Так, например, при наблюдении ее в течение примерно 1,5 часов частица перемещалась вдоль оси Z фактически на всю глубину микрокуветы, при том, что ее средняя высота оставалась примерно прежней, т. е. никакой “гравитационной седиментации” в данном случае не происходит. Расчетная температура $T = 293$ К (20°C). Вязкость воды при этой температуре $\eta = 10^{-2}\text{Г}/(\text{см} \cdot \text{с}) = 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$.

Расчетный коэффициент диффузии

$$D_{\text{расч}} = kT/6\pi\eta a = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 / (6\pi \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot 0,5) = 0,44 \cdot 10^{-12} (\text{м}^2/\text{с}).$$

С учетом масштаба изображения ($1 \text{ мкм} = 7,38 \text{ пкс}$) экспериментальное значение коэффициента диффузии

$$D_{\text{эксп}} = 55/2 \text{ пкс}^2/\text{с} = 55/(2 \cdot 7,38^2) \text{ мкм}^2/\text{с} = 0,5 \text{ мкм}^2/\text{с} = 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}.$$

3. Вывод по коэффициенту диффузии. Таким образом, экспериментальный коэффициент $D_{\text{эксп}}$, усредненный по $N = 2000$ смещениям и по десяти выборкам (фильмам), с точностью 10% соответствует теоретическому коэффициенту диффузии $D_{\text{расч}}$. Учитывая погрешность определения истинного размера наблюдаемой броуновской частицы, это более чем хорошее совпадение. Не забудем однако, что для такого усреднения нам понадобилось “следить” за частицей в течение примерно часа. За это время частица “прошла” по значительной части всего объема микрокуветы (по всем трем осям координат), и все индивидуальные характеристики флуктуационной микродинамики системы жидкость+частица оказались усредненными, т. е. потерянными для исследования! До тех пор, пока мы не занимались нанотехнологиями, нас действительно интересовал только единственный макропараметр системы D , и законов (1–3) было вполне достаточно для описания броуновского движения. В настоящее время нам нужны более подробные сведения о нем.

4. Проверка линейности закона (1). Закон (1) как функция времени $n\tau$ математически представляет собой прямую, проходящую через начало координат: $y = a \cdot n\tau$. Фактически для всех экспериментальных зависимостей, снятых по десяти фильмам, линии тренда описываются уравнениями прямых $y = a \cdot n\tau \pm c$, т. е. не проходят через начало координат. Причем величина c может достигать больших значений, сравнимых со значением a при $n\tau = 1$.

В рамках теоретической модели винеровского случайного процесса постоянная c не имеет объяснения. Некоторые исследователи [11] полагают, что на малых временных масштабах $\tau \ll 1$ с зависимость среднего квадрата смещения от $n\tau$ носит не линейный, а квадратичный характер. Такая зависимость действительно могла бы дать на больших временах $n\tau$ некоторое смещение c . Однако это должно привести к существенно отрицательным значениям c (рис. 10). Между тем, на основе наших данных, вероятность появления положительных

и отрицательных c примерно одинакова. По-видимому, объяснение этой величине нужно искать в рамках флуктуационной модели броуновского движения, поскольку винеровская модель, существенно опирающаяся на помоллекулярные удары в качестве причины броуновского движения, не допускает ее существования.

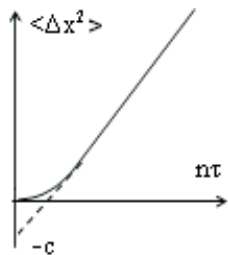


Рис. 10. К определению c .

Заметим, что в данном случае ситуация отличается от выводов, сделанных относительно системного макропараметра D . Наличие смещения c наблюдается не только для малых $N = 200$, но и для больших ($N = 1000$ и $N = 2000$) чисел точек траектории. Таким образом, реальное движение броуновских частиц, по-видимому, значительно сложнее описываемого в рамках винеровской модели. Косвенным подтверждением этого служат данные, полученные по учебной методике. В этом случае зависимости $\langle \Delta x^2 \rangle = f(n\tau)$ оказываются значительно сложнее и, как правило, нелинейными. Пример значительно более сложной зависимости, чем линейная, полученной для фильма 3к, показан на рис. 11.

Напомним, что учебная методика обработки смещений не соответствует винеровской модели броуновского движения. Но теории винеровского случайного процесса не отвечает и сама флуктуационная модель броуновского движения, поскольку в ее рамках помоллекулярный механизм движения частицы уже не реализуется.

Напомним, что учебная методика обработки смещений не соответствует винеровской модели броуновского движения. Но теории винеровского случайного процесса не отвечает и сама флуктуационная модель броуновского движения, поскольку в ее рамках помоллекулярный механизм движения частицы уже не реализуется.

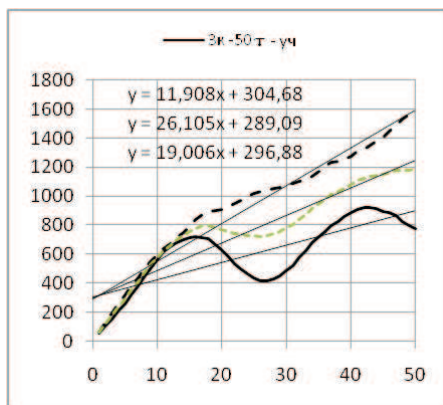


Рис. 11. Зависимости σ^2 для фильма 3к.

5. Проверка закона (3) $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle$. Полного совпадения величин $\langle \Delta x^2 \rangle$ и $\langle \Delta y^2 \rangle$ в силу случайности процесса, конечно, не ожидается. Однако данные столбцов 12, 13 табл. 2 показывают, что отношение $\langle \Delta x^2 \rangle / \langle \Delta y^2 \rangle$ (или, что то же самое, D_x / D_y , σ_x / σ_y) меняется для различных фильмов в пределах 0,5–1,5. Такое изменение также не позволяет считать, что по индивидуальной траектории можно получить подтверждение закона (3). Более того, как показывают наблюдения не за средними, а за индивидуальными смещениями $\Delta x^2 / \Delta y^2$, между ними наблюдается достаточно хорошая антикорреляция:

большим значениям Δx^2 соответствуют малые значения Δy^2 , и наоборот. Однако этот вопрос требует дополнительных исследований, поскольку в наших экспериментах смещение по третьей координате Δz^2 не фиксировалось. А для модели флуктуационной микродинамики броуновского движения наилучшая корреляция должна наблюдаться с учетом смещения по всем трем координатам.

6. О проблеме “как далеко уйдет частица?”. Вернемся еще раз к вопросу о трактовке смысла величины $\langle \Delta x^2 \rangle$, входящей в закон (1). Мы уже говорили, что в модели броуновского движения как винеровского случайного процесса эта величина определяет дисперсию распределения смещений, а не то, “как далеко уходит частица за время $n\tau$ ”. По экспериментальным данным мы можем определить средний уход частицы для десяти фильмов. В табл. 3 (строки 2, 3) приведены проекции смещений частицы по осям X и Y за 200 с для каждого фильма. В двух следующих строках приведены средние значения смещений за $n\tau = 1$ с. По ним мы можем определить средний модуль ухода частицы по осям X и Y за 1 с и сравнить его со стандартным отклонением распределения $\sigma = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$, соответствующим значению коэффициента $2D = 55$ и времени $n\tau = 1$ с.

Табл. 3. Модуль среднего смещения частицы по десяти фильмам

	1к	2к	3к	4к	5к	6к	7к	8к	9к	10к
Δx	-166	-16	-15	-172	46	44	34	72	20	-4
Δy	63	44	137	-107	272	58	97	154	-85	211
$\langle \Delta x \rangle$	-0,83	-0,08	-0,07	-0,86	0,23	0,22	0,17	0,36	0,1	-0,02
$\langle \Delta y \rangle$	0,315	0,22	0,68	-0,535	1,36	0,29	0,485	0,77	-0,425	-1,055

Примечание: Все размеры даны в пкс.

Соответствующие средние модули равны: $\langle |\Delta x| \rangle = 0,29$, $\langle |\Delta y| \rangle = 0,614$, а величина $\sigma = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} = \sqrt{2D} = 7,42$. Как видим, величина $\sigma = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$ много больше “среднего ухода” частиц за время $n\tau = 1$ с, равного $\langle |\Delta x| \rangle$ и $\langle |\Delta y| \rangle$. Это и следовало ожидать, если трактовать величину $\langle \Delta x^2 \rangle$ как дисперсию распределения смещений, а не “средний уход частицы”. В диапазоне $[-\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}, +\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}]$ расположено 68% всех смещений, поэтому большинство из них будет много меньше этой величины, что и показывает эксперимент.

Заключение

Проведенные исследования заставляют сделать следующие выводы.

- Принятые в настоящее время законы броуновского движения частиц

$$\langle \Delta x^2 \rangle = 2D\tau \quad (1), \quad D = kT/6\pi\eta a \quad (2) \quad \text{и} \quad \langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle = \langle \Delta z^2 \rangle \quad (3)$$

являются лишь статистическим пределом при очень большом числе зафиксированных последовательных положений частицы ($N > 1000$), тогда как при относительно малых $N \sim 200$ экспериментальные значения D могут в 2–5 раз расходиться с расчетным значением.

- При тех же малых $N \sim 200$ наблюдается почти неизбежное отклонение функции $\langle \Delta x^2 \rangle = 2D\tau$ от линейной зависимости, предписываемой законом $\langle \Delta x^2 \rangle = 2D\tau$.

• При этом средние квадраты проекций $\langle \Delta x^2 \rangle$ и $\langle \Delta y^2 \rangle$ и, соответственно, величины D_x и D_y , определенные по ним, как правило, не равны друг другу ($\langle \Delta x^2 \rangle \neq \langle \Delta y^2 \rangle$, $D_x \neq D_y$) и могут отличаться друг от друга в несколько раз.

• При любых N в законе (1) появляется постоянное слагаемое c : $\langle \Delta x^2 \rangle = 2D\tau \pm c$, не находящее объяснения в рамках винеровского случайного процесса, принятого в качестве математической модели броуновского движения.

Отмеченные особенности движения индивидуальных броуновских частиц заставляют полагать, что при относительно малом числе $N \sim 100$ их параметры движения отражают скорее флуктуационную микродинамику поведения самой жидкости, чем такие обобщенные макропараметры системы среда+частица, как коэффициент диффузии D . Этот факт может оказаться важным для тех процессов нанотехнологий, которые связаны с поведением частиц в жидкостях при малых временных и пространственных масштабах (от нано- до микрометрового диапазона). В этом смысле регистрация параметров движения индивидуальных броуновских частиц, легко доступная при современных технических средствах (применение веб-камер и компьютерная обработка траекторий частиц), может послужить довольно тонким инструментом для изучения флуктуационной микродинамики поведения жидких сред, что становится актуальной задачей, поскольку развитие современных нанотехнологий требует более глубокого знания законов поведения жидких сред в области микро- и нанометрового диапазона. Так что броуновское движение может служить хорошим инструментом для таких исследований в жидких средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая энциклопедия. В 5-ти т. / Под ред. А. М. Прохорова. Т. 1. — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — 704 с. Т. 2 — М.: Сов. энциклопедия, 1990. — 703 с. Т. 3. — М.: Большая российская энциклопедия, 1992. — 672 с. Т. 4. — М.: Большая российская энциклопедия, 1994. — 704 с. Т. 5. — М.: Большая российская энциклопедия, 1998. — 760 с.
2. Большая Российская энциклопедия. Т. 4. — М.: Большая российская энциклопедия, 2006. — С. 237.
3. Зенин С. В., Тяглов Б. В. *Гидрофобная модель структуры ассоциатов молекул воды* // Ж. Физ. химии. — 1994. — Т. 68, № 4. — С. 636–641.
4. Зенин С. В. *Исследование структуры воды методом протонного магнитного резонанса* // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 3. — С. 328–329.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 4: Кинетика, теплота, звук. — М.: Мир, 1965. — 262 с.
6. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — 847 с.
7. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972. — 376 с.
8. Физический практикум / Под ред. В. И. Ивероной. — М.: Наука, 1962. — 958 с.
9. Броуновское движение / Сборник статей А. Эйнштейна и М. Смолуховского. — Л.; М.: ОНТИ, 1936. — 608 с.
10. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 3. — М.: Наука, 1966. — 632 с.
11. Багаев С. Н., Орлов В. А., Панов С. В. *Наблюдение броуновского движения единичных микрообъектов в жидкостях на малых временных и пространственных масштабах* // ДАН. — 2007. — Т. 416, № 2. — С. 1–6.